

Théorème de Pythagore et sa réciproque

1. Le théorème de Pythagore

Le théorème de Pythagore permet de calculer, dans un triangle rectangle, une longueur à partir de celles des deux autres côtés.

Dans un triangle rectangle, l'hypoténuse au carré est égale à la somme de deux autres côtés chacun au carré.

Exemples

- Soit ABC un triangle rectangle en A. $AB = 6\text{cm}$ et $AC = 4\text{cm}$. Calculer BC.

Dans le triangle ABC rectangle en A, utilisons le théorème de Pythagore :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$BC^2 = 6^2 + 4^2$$

$$BC^2 = 36 + 16$$

$$BC^2 = 52$$

$$BC = \sqrt{52} \text{ cm} \approx 7,2 \text{ cm}$$

- Soit ABC un triangle rectangle en A. $AB = 1\text{cm}$ et $BC = \sqrt{10} \text{ cm}$. Calculer AC.

Dans le triangle ABC rectangle en A, utilisons le théorème de Pythagore :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \text{ donc } AC^2 = BC^2 - AB^2$$

$$AC^2 = (\sqrt{10})^2 - 1^2$$

$$AC^2 = 10 - 1$$

$$AC^2 = 9$$

$$AC = \sqrt{9} \text{ cm} = 3 \text{ cm}$$

- Soit ABC un triangle rectangle en A. $BC = 13\text{cm}$ et $AC = 12\text{cm}$. Calculer AB.

Dans le triangle ABC rectangle en A, utilisons le théorème de Pythagore :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \text{ donc } AB^2 = BC^2 - AC^2$$

$$AB^2 = 13^2 - 12^2$$

$$AB^2 = 169 - 144$$

$$AB^2 = 25$$

$$AB = \sqrt{25} \text{ cm} = 5 \text{ cm}$$

2. La réciproque du théorème de Pythagore

La réciproque du théorème de Pythagore permet, à partir des longueurs des trois côtés, de déterminer si un triangle est rectangle ou pas.

Tout d'abord on calcule, d'un côté l'hypoténuse au carré et de l'autre la somme des deux autres côtés chacun au carré.

- Si les deux résultats sont égaux, alors, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle est un triangle rectangle.
- Si les deux résultats sont différents, alors, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle n'est pas un triangle rectangle.

Exemples

- J'ai un triangle ABC. $AB = 4\text{cm}$, $AC = 3\text{cm}$ et $BC = 5\text{cm}$.
Le triangle ABC est-il rectangle ?

$$BC^2 = 5^2 = 25$$

$$AB^2 + AC^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$$

$BC^2 = AB^2 + AC^2$, donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A.

- J'ai un triangle ABC. $AB = 5\text{cm}$, $AC = 8\text{cm}$ et $BC = 12\text{cm}$.
Le triangle ABC est-il rectangle ?

$$BC^2 = 12^2 = 144$$

$$AB^2 + AC^2 = 5^2 + 8^2 = 25 + 64 = 89$$

$BC^2 \neq AB^2 + AC^2$, donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC n'est pas un triangle rectangle.