Nombres entiers et rationnels (diviseur commun et PGCD)

1. Diviseur d'un nombre entier

Pour tout a et b nombres entiers différents de 0 : si $\frac{a}{b}$ est égal à un entier alors a est un multiple de b c'est-à-dire que b est un diviseur de a.

2. Diviseur commun de deux nombres entiers

Pour tout a, b et c nombres entiers différents de 0 : si a et b sont divisibles par c alors c est un diviseur commun de a et b.
NB : 1 est un diviseur commun à tous les nombres entiers.

3. Définition PGCD

Pour tout a et b deux nombres entiers différents de 0, l'ensemble des diviseurs communs à a et b possède un plus grand diviseur commun de a et b noté PGCD(a ; b).
NB : PGCD (a ; b) ≤ a ; PGCD (a ; b) ≤ b. Si a est un diviseur de b alors PGCD(a ; b) = a.

4. Calculer un PGCD

Il existe deux méthodes : la méthode des soustractions et la méthode de l'algorithme d'Euclide (ou méthode de la division).

Méthode des soustractions

Cherchons le PGCD(247 ; 209).

- 247 – 209 = 38
- 209 – 38 = 171
- 171 – 38 = 133
- 133 – 38 = 95
- 95 – 38 = 57
- 57 – 38 = 19
- 38 – 19 = 19
- 19 – 19 = 0

19 est le plus grand diviseur commun des nombres 247 et 209.

Algorithme d'Euclide

Cherchons le PGCD(1.045 ; 935) :
1.045 : 935 = 1 reste 110
935 : 110 = 8 reste 55
110 : 55 = 2 reste 0.
Le plus grand diviseur commun des nombres 1.045 et 935 est le dernier reste non nul donc PGCD(1045 ; 935) = 55

5. Rendre une fraction irréductible

Si on simplifie une fraction par le plus grand diviseur commun de son numérateur et de son dénominateur on obtient une fraction irréductible.

Exemple

Rendre irréductible la fraction $\frac{175}{63}$.

PGCD(660 ; 924) = 7

Donc $\frac{175}{63} = \frac{175:7}{63:7} = \frac{25}{9}$